数理解析研究所講究録
200巻 1974年 72-75

ある種の共役類について

埼玉大 教育 稲垣信夫

§1 序

Avinoam Mann は On subgroups of Finite Groups II（J. Alg. 22. 1972. P233 - P240）の中で可解群 G の部分群 H と，G の Sylow systems との間の関係づけに着目して種々の部分群を導入した。以下そこで導入された部分群を定義する。$\mathcal{S}$ を G の Sylow system とするとき，$H \cap \mathcal{S}$ が H の Sylow system となる場合に Sylow system $\mathcal{S}$ は H の中で reducible という。$\mathfrak{M}_0$ を H の中で reducible な G のすべての Sylow systems の集合とする。G は共役を作る方法で G のすべての Sylow systems 上で transitive であるが，上の $\mathfrak{M}_0$ を含む最少の imprimitivity の集合を $\mathfrak{M}$ とおき，これを $\mathfrak{M}_0$ を含む最少の block とよぶことにする。そのとき $\mathfrak{M}$ の stabilizer を $Q(H)$ とかく。$\mathfrak{M}$ と $Q(H)$ の間には次の関係が知られている 即ち $\mathfrak{M}$ は $Q(H)$ の中で reducible な G のすべ

ての Sylow systems の集合である．また $\mathfrak{M}_0$ の stabilizer を $L(H)$ とかく

つぎに G の部分群 H と K が G の中で共役であるということを以下で定義する．すなわち H の中で reducible な G の Sylow systems の集合全体が K のそれと一致する場合である．この定義は R. Carter によっている．A. Mann はこの共役類の中に最大元が唯1つ存在することを示した．これを $M(H)$ とかく．そのとき上に定義した $L(H)$ は $N_G(M(H))$ である．

$Q(H)$ については A. Mann によって多くのことが知られているが，$M(H)$，$L(H)$ についてはあまりよく判っていない．

A. Mann は $\mathfrak{M}_0$ が block となるための必要十分条件を strong subnormalizer の存在定理でのべている．(System normalizers and subnormalizers. Proc. Lond. Math. Soc. (3) 20 (1970) P123 – P143) この小論では上の $M(H)$ を用いて別の型の必要十分条件をのべる．

§2. 定理について

定義　$G \supset H$ が G の中で abnormal とは $\langle H, H^g \rangle \ni g$

定義　$G \supset H$ が G の中で pronormal とは H と H^g に対して $H^g = H^t$ となる適当な元 t が $\langle H, H^g \rangle$ の中にとれること．

定理　$G \supset H$, $\mathfrak{M}_0$ は上記のものとする。そのとき以下は同値である。

1° $\mathfrak{M}_0$ が block を作っている。

2° $M(H)$ は abnormal

3° $M(H)$ は pronormal

さらにこのとき　$L(H) = Q(H) = M(H) \supseteq H$.

証明の概略

1° → 2°　$\mathfrak{M}_0$ が block を作っているとすると $\mathfrak{M}_0$ は $Q(H)$ の中で reducible な G の Sylow systems の全体と一致するから $Q(H) \leqq M(H)$. 一方 $Q(H) = \{ g \mid \mathfrak{M}_0^g = \mathfrak{M}_0 \} = L(H) \geqq M(H)$ より $Q(H) = M(H)$ をうる。ところで $Q(H)$ が abnormal は知られているから $M(H)$ は abnormal となる。

2° → 3°　abnormal なら pronormal は定義より明白.

3° → 1°　$M(H)$ を pronormal とすれば $M(H) \sim M(H)^g$ より適切な x が $< M(H), M(H)^g >$ の中より取れて $M(H)^x = M(H)^g$ をうるから $g \in x N_G(M(H))$ よって $G = < M(H), M(H)^g > N_G(M(H))$　G がこのような型に書ける事実より A. Mann の定理が用いられて $N_G(M(H)) \geqq Q(M(H))$ をうる。一方 $Q(M(H))$ の定義より $N_G(M(H)) \leqq Q(M(H))$ であるから $N_G(M(H)) = Q(M(H))$ をうる。また $M(H)$ の定義より $Q(M(H)) = Q(H)$ であるから $Q(H)$

$\triangleright M(H)$ となる. ここで $Q(H)$ で reducible な Sylow system の集合を $\mathfrak{M}$ とすれば 上記より $\mathfrak{M}$ は $M(H)$ で reducible となるから $\mathfrak{M} \leq \mathfrak{M}_0$ 一方 $\mathfrak{M} \geq \mathfrak{M}_0$ より $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0$ となつて block を作る.